数学的準備体操：問題集

理化学研究所 脳科学総合研究センター
村田 昇

2. 神経回路の数理モデル

問題 1　3 層パーセプトロンは matlab では

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & \\ & \vdots & \\ & \cdots & w_{hn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & \\ & \vdots & \\ & \cdots & v_{mh} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{y} = \phi(V * \psi(W * \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}) \tag{1}$$

として簡単に実現できる．ただし ψ,ϕ は sign, tanh などの適当な関数とする．
例えば $n = 2$,$h = 2$,$m = 1$ ($\boldsymbol{x}$ を 2 次元，$\boldsymbol{y}$ を 1 次元，中間表現を 2 次元)，

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{(step function)} \qquad \phi(x) = x \quad \text{(identity function)}$$

とし，

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = 0$$

とすれば，下記の表の様な exclusive OR が実現できる．

1.1　上の例が確かに exclusive OR となることを matlab で確かめよ．

入力		出力
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ヒント　step 関数は例えば`ceil(tanh())`などで実現できる．

1.2　入力 3 次元以上で，何か面白い論理関数を実現する 3 層パーセプトロンを作れ．

3. 情報理論の基礎

問題 **2**　対数正規分布は密度関数が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (0 < x < \infty) \tag{2}$$

で表される確率分布である．

2.1　対数正規分布のエントロピーを定義に従って計算せよ．

2.2　$\mu = 0, \sigma = 1$ として密度関数のグラフをプロットせよ．

2.3　matlab の正規乱数 (`randn()`) を使って，対数正規分布に従う乱数を適当な数だけ生成せよ．

またそのヒストグラムをプロットせよ．

ヒント　ヒストグラムを表示するには`hist()` という関数を使う．

2.4　上で生成した乱数を用いて尤もらしいと思う方法でエントロピーを数値的に計算し，**2.1** の結果と比較せよ．

ヒント　例えば多項分布だと思えば，

```
[n xx]=hist(x);
```

によって`n` に代入される頻度を正規化して p_i とすれば，

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i \tag{3}$$

がエントロピーを求める式になる．

以下では`data.mat` と`hist3.m` を作業ディレクトリに置き，

```
load data
```

により格納されている`x` というデータを読み込んでおく．`x` は 2×8000 の乱数である．

2.5

```
plot(x(1,:),x(2,:),'.')
```

として散布図を書け．

2.6 `cov()` を用いて相関を計算せよ．

ヒント　`cov()` で用いるデータの形式と `x` の形式の違いに注意せよ．

2.7 `hist3()` を用いてヒストグラムをプロットせよ．

ヒント

```
hist3(x);
```

でヒストグラムが表示される．また

```
[nn x1 x2]=hist3(x);
```

で，`nn` に頻度，`x1,x2` にそれぞれの軸の bin の中心位置が代入される．

2.8 同時分布，および周辺分布のエントロピーを数値的に計算し，定義に従って相互情報量を計算せよ．

4．統計的推測の基礎

問題 **3**　平均 μ の Cauchy 分布の密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\mu)^2]} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4}$$

で表される．

3.1　matlab の一様乱数 (`rand()`) を使って，平均 0 の Cauchy 分布に従う乱数を適当な数だけ生成せよ．

またそのヒストグラムをプロットせよ．

ヒント　ある確率変数の分布関数を F とする．

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

$[0,1]$ 上の一様乱数を U とすると

$$Prob\{U \leq a\} = a, \quad (0 \leq a \leq 1)$$

であるが，

$$Prob\{F^{-1}(U) \leq b\} = Prob\{U \leq F(b)\} = F(b)$$

従って，$F^{-1}(U)$ は分布 F に従う確率変数となる．

3.2　上で生成した乱数が正規分布に従うと仮定して，平均値の最尤推定を行え．

ヒント　正規分布の密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (-\infty < x < \infty) \tag{5}$$

である．

3.3　上の乱数が Cauchy 分布に従うと仮定して，平均値の最尤推定を行え．

ヒント　解析的には解けないので，Newton 法などを使う．